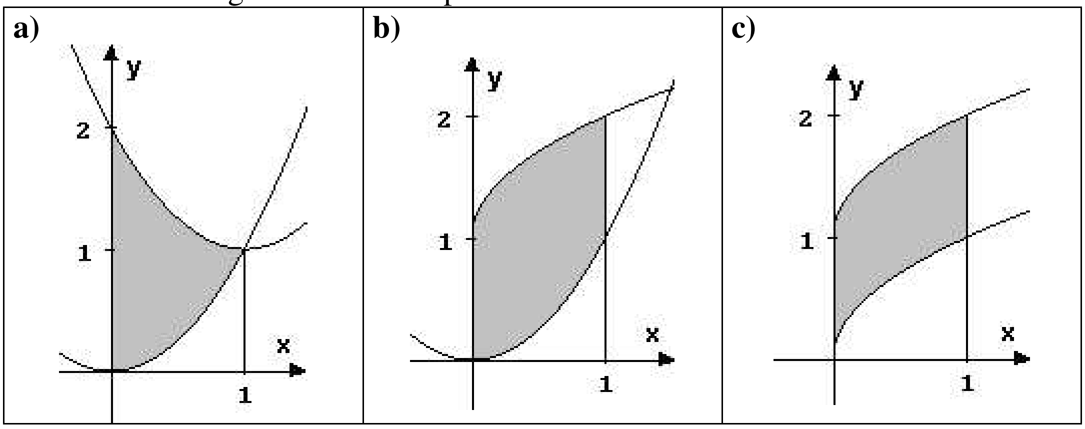
Aufgabe 1: Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

a) Zeichnen Sie die Funktion im Intervall [0 ; 2]. Verwenden Sie für die x-Achse den Maßstab 1 Einheit $\hat{=}$ 5 cm und für die y-Achse den Maßstab 1 Einheit $\hat{=}$ 2 cm.

b) Veranschaulichen Sie an dem Graphen die Untersumme $\underline{S}_5$ für das Intervall [0 ; 2]. Berechnen Sie den konkreten Wert dieser Untersumme.

c) Um wie viel unterscheidet sich die Untersumme $\underline{S}_5$ von der Obersumme $\overline{S}_5$? Begründen Sie den Wert mit Hilfe des Graphen und der eingezeichneten Untersumme.

Aufgabe 2: Für die Funktion *f* mit $f(x) = x^2$ beträgt der Flächeninhalt unter dem Graphen von *f* im Intervall [0 ; *b*]: $A_{[0;b]} = \frac{1}{3}b^3$. Verwenden Sie dieses Ergebnis, um den Inhalt der schraffierten Flächen zu berechnen.
Hinweis: Bei den abgebildeten Graphen handelt es sich ausschließlich um verschobene und gedrehte Normalparabeln.



Aufgabe 3: Fassen Sie, falls möglich, die folgenden Integrale zusammen. Verwenden Sie dafür die Integrationsregeln: Summenregel, Faktorregel, Intervalladditivität.
Hinweis: Es ist **keine** Berechnung der Integrale gefordert!

a) $\int_{-5}^{1} x^4 + 2x^3\,dx - 2\cdot\int_{-5}^{1} x^3 - x\,dx$ **b)** $\int_{-1}^{7} 2x - \sin(x)\,dx + \int_{7}^{-2} x^3dx$

c) $\int_{0}^{-5} x^3dx + \int_{-6}^{2} x^3dx - \int_{0}^{2} x^3dx$ **d)** $4\int_{-4}^{2} x+5\,dx + \int_{-4}^{5} x+5\,dx - \int_{5}^{2} 4x+20\,dx$

e) $\int_{-1}^{2} x^2\,dx - x\cdot\int_{-1}^{2} x\,dx + x^2\cdot\int_{-1}^{2} 1\,dx$

Aufgabe 4: Zeigen Sie: Die Funktion *F* ist eine Stammfunktion der Funktion *f*. Geben Sie für die Funktion *f* aus Teilaufgabe a) eine weitere Stammfunktion an.

a) $f(x) = \sin(x)\cdot\cos(x)\,; F(x) = \frac{(\sin(x))^2}{2}$ **b)** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x-1}}\,; F(x) = \frac{\sqrt{4x-1}}{2}$

Aufgabe 5: Begründen Sie die nachfolgend gemachten Aussagen.
Hinweis: Begründen können Sie durch eine Rechnung oder eine kommentierte Skizze, in welcher der qualitative Verlauf des Graphen und der von ihm eingeschlossenen Flächen deutlich wird.

a) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\,dx = 2\cdot\int_{0}^{\pi}\cos(x)\,dx$ **b)** $\int_{0}^{5} x^2\,dx - \int_{5}^{0} x^2 dx - \int_{-5}^{5} x^2\,dx = 0$

c) $\int_{-2}^{3} 3x^4\,dx + 3\int_{3}^{-2} x^4\,dx = 0$ **d)** $\int_{0}^{\pi} \sin(x)\,dx = -\int_{-\pi}^{0}\sin(x)\,dx$

Aufgabe 6: Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe einer Stammfunktion**.**

a) $\int_{-3}^{1} 2x^2 - 5x - 3\,dx$ **b)** $\int_{-2\pi}^{\pi} \sin(x)\,dx$ **c)** $6\int_{1}^{3} \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

d) $\int_{-1}^{4} \frac{x^5 + 2x^4 - 3x}{x^3}\,dx$ **e)** $\int_{-b}^{b} \left(\frac{1}{2}x - 2\right)^2 dx,\ b \in \mathbb{R}^+$ **f)** $\int_{2}^{4} \frac{2x - \sqrt{x^3}}{\sqrt{x}}\,dx$

Aufgabe 7: **a)** Gegeben sei die Funktion *f* mit $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$. Berechnen Sie den Flächeninhalt, der vollständig vom Graphen von *f* und der x-Achse eingeschlossen wird.

b) Sei g mit $g(x) = x^3 + x$. Berechnen Sie den Flächeninhalt, welcher vollständig von den Graphen der Funktionen *f* und g eingeschlossen wird.

c) Gegeben sie die Funktion $f(x) = -x^2$ und die Ursprungsgerade $g(x) = m\cdot x$, $m \in \mathbb{R}$ Welche Steigung m muss die Gerade g besitzen, damit die Graphen von *f* und g einen Flächeninhalt von $\frac{4}{3}$ vollständig einschließen?

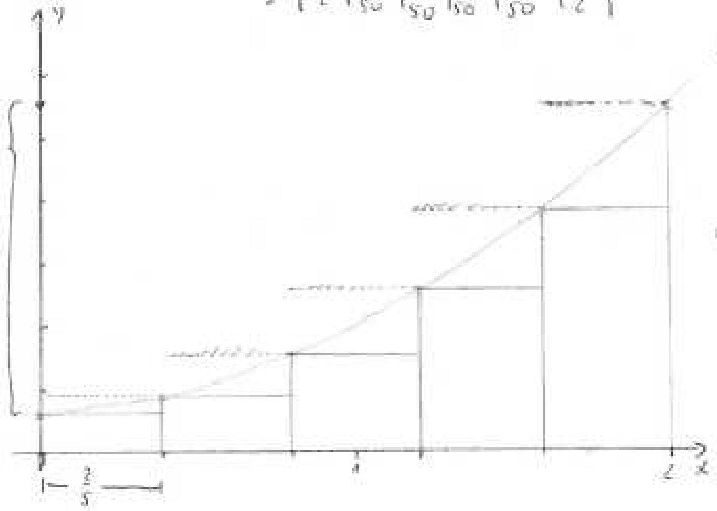
Viel Erfolg!

Lösungen:

A1 a) $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

x	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{8}{5}$	2
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{43}{50}$	$\frac{77}{50}$	$\frac{127}{50}$	$\frac{193}{50}$	$\frac{11}{2}$

b)



$\underline{S_5} = \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1}{2} + \frac{43}{50} + \frac{77}{50} + \frac{127}{50} + \frac{193}{50}\right) = \frac{2}{5}\cdot\frac{465}{50} = 3\frac{18}{25}$

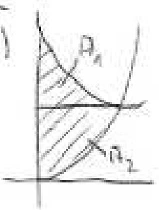
$= 3{,}72$

c) $\overline{S_5} = \underline{S_5} - \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\cdot\frac{11}{2} = 5{,}72$

$\overline{S_5}$ unterscheidet sich um $\frac{2}{5}\cdot 5$, da die fehlenden Höhen zu Untersumme und Obersumme zusammen 5 ergeben

A2

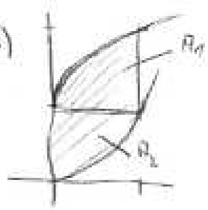
a)



$A_1 = \frac{1}{3}$ $A_2 = 1 - \frac{1}{3}$

$A = A_1 + A_2 = 1$

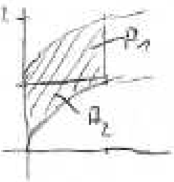
b)



$A_1 = 1 - \frac{1}{3}$ $A_2 = 1 - \frac{1}{3}$

$A = A_1 + A_2 = 2 - \frac{2}{3} = 1\frac{1}{3}$

c)



$A_1 = \frac{2}{3}$ $A_2 = \frac{1}{3}$

$A = A_1 + A_2 = 1$

A3 a) $\int_{-5}^{1} x^4 + 2x^3\,dx - 2\int_{-5}^{1} x^3 - x\,dx = \int_{-5}^{1} x^4 + 2x^3\,dx + \int_{-5}^{1} -2x^3 + 2x\,dx = \int_{-5}^{1} x^4 + 2x\,dx$

b) $\int_{-1}^{7} 2x - \sin x\,dx + \int_{7}^{-1} x^3\,dx =$ / keine Vereinfachung möglich

c) $\int_{0}^{-5} x^3\,dx + \int_{-6}^{2} x^3\,dx - \int_{0}^{2} x^3\,dx = \int_{0}^{-5} x^3\,dx + \int_{-6}^{2} x^3\,dx + \int_{2}^{0} x^3\,dx = \int_{-6}^{-5} x^3\,dx$

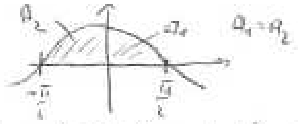
d) $4\int_{-4}^{2} x + 5\,dx + \int_{-4}^{5} x + 5\,dx - \int_{5}^{2} 4x + 20\,dx = \int_{-4}^{2} 4x + 20\,dx + \int_{-4}^{5} x + 5\,dx + \int_{2}^{5} 4x + 20\,dx = \int_{-4}^{5} 4x + 20\,dx + \int_{-4}^{5} x + 5\,dx = \int_{-4}^{5} 5x + 25\,dx$

e) $\int_{-1}^{2} x^2\,dx - x\int_{-1}^{2} x\,dx + x^2\int_{-1}^{2} 1\,dx =$ / keine Vereinfachung möglich

A4 a) $F'(x) = \frac{2\cdot\sin x\cdot\cos x}{2} = \sin x\cdot\cos x = f(x)$ $F_2(x) = \frac{(\sin x)^2}{2} + 5$

b) $F'(x) = \left[\frac{(4x-1)^{1\frac{1}{2}}}{2}\right]' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(4x-1)^{\frac{1}{2}}\cdot 4 \cdot \sqrt{4x-1} = f(x)$

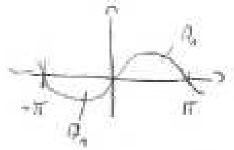
A5 a) cos ist achsensymmetrisch $\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,dx = 2\cdot\int_{0}^{\pi} \cos x\,dx$



b) $\int_0^1 x^2dx + \int_0^5 x^2dx - \int_{-5}^{5} x^2dx = 2\cdot\int_0^5 x^2dx - \int_{-5}^{5} x^2dx = 0$, da x^2 achsensymmetrisch ist und damit $2\cdot\int_0^5 x^2dx = \int_{-5}^{5} x^2dx$ ist.

c) $\int_{-2}^{3} 3x^4dx + 3\cdot\int_{-3}^{-2} x^4dx = \int_{-2}^{3} 3x^4dx + \int_{-3}^{-2} 3x^4dx = \int_{-2}^{-2} 3x^4dx = 0$, da linke u. rechte Grenze identisch sind

d) $\int_0^{\pi} \sin x\,dx = -\int_{-\pi}^{0} \sin x\,dx$, da sin punktsymmetrisch ist:



A6 a) $\int_{-3}^{1} 2x^2-5x-3\,dx = \left[\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2-3x\right]_{-3}^{1} = \left(\frac{2}{3}-\frac{5}{2}-3\right)-\left(\frac{2}{3}\cdot(-3)^3-\frac{5}{2}(-3)^2-3\cdot(-3)\right) = \underline{\underline{26\frac{2}{3}}}$

b) $\int_{-2\pi}^{\pi} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_{-2\pi}^{\pi} = -\cos\pi + \cos 2\pi = 1+1 = \underline{\underline{2}}$

c) $6\int_1^3 \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 6\cdot\left[\frac{2}{3}x\cdot\sqrt{x} - 2\sqrt{x}\right]_1^3 = 6\cdot\left[\frac{2}{3}\cdot3\cdot\sqrt{3}-2\cdot\sqrt{3} - \left(\frac{2}{3}-2\right)\right] = 6\cdot\left(1\frac{1}{3}\right) = \underline{\underline{8}}$

d) $\int_{-1}^{4} \frac{x^5+2x^4-3x}{x^3}\,dx = \int_{-1}^{4} x^2+2x-\frac{3}{x^2}\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3+x^2+\frac{3}{x}\right]_{-1}^{4} = \frac{1}{3}\cdot64+16+\frac{3}{4}-\left(-\frac{1}{3}+1-3\right) = \underline{\underline{40\frac{5}{12}}}$

e) $\int_{-b}^{b} \left(\frac{1}{2}x-2\right)^2dx = \int_{-b}^{b} \frac{1}{4}x^2-2x+4\,dx = \left[\frac{1}{12}x^3-x^2+4x\right]_{-b}^{b} = \frac{1}{12}b^3-b^2+4b-\left(\frac{1}{12}\cdot(-b)^3-b^2+4\cdot(-b)\right) = \underline{\underline{\frac{1}{6}b^3+8b}}$

f) $\int_2^4 \frac{2x-\sqrt{x^5}}{\sqrt{x}}\,dx = \int_2^4 2\sqrt{x}-x^2\,dx = \left[\frac{4}{3}x\sqrt{x}-\frac{1}{3}x^3\right]_2^4 = \frac{4}{3}\cdot4\cdot2-\frac{1}{3}\cdot64-\left(\frac{4}{3}\cdot2\sqrt{2}-\frac{1}{3}\cdot8\right) = -\frac{24}{3}-\frac{8}{3}\cdot\sqrt{2} = \underline{\underline{0{,}95}}$

A7 a) $f(x) = x^3+4x^2+x-6 = (x-1)(x^2+5x+6) = (x-1)(x+2)(x+3)$

x^3-x^2
$5x^2+x$
$5x^2-5x$
$6x-6$

$x_{2/3} = -2{,}5\pm\sqrt{6{,}25-6}$
$\Rightarrow x_2 = -2 \quad x_3 = -3$

$A_1 = \left|\int_{-3}^{-2} f(x)\,dx\right| = \left|\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x\right]_{-3}^{-2}\right| = \left|\frac{1}{4}\cdot16-\frac{4}{3}\cdot8+\frac{1}{2}\cdot4+6\cdot2-\left(\frac{1}{4}\cdot81-\frac{4}{3}\cdot27+\frac{1}{2}\cdot9+6\cdot3\right)\right| = \left|7\frac{1}{3}-6\frac{3}{4}\right| = \frac{7}{12}$

$A_2 = \left|\int_{-2}^{1} f(x)\,dx\right| = \left|\left[\ \ldots\ \right]_{-2}^{1}\right| = \left|\frac{1}{4}+\frac{4}{3}+\frac{1}{2}-6-7\frac{1}{3}\right| = \left|-3\frac{11}{12}-7\frac{1}{3}\right| = \left|-11\frac{1}{4}\right| = 11\frac{1}{4}$

$A = \frac{7}{12}+11\frac{1}{4} = \underline{\underline{11\frac{5}{6}}}$

b) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3+4x^2+x-6 = x^3+x \Leftrightarrow 4x^2-6=0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

$A = \left|\int_{-\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{\frac{3}{2}}} f(x)-g(x)\,dx\right| = \left|\int_{-\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{\frac{3}{2}}} 4x^2-6\,dx\right| = \left|\left[\frac{4}{3}x^3-6x\right]_{-\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{\frac{3}{2}}}\right| = \left|\frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}^3-6\sqrt{\frac{3}{2}}-\left(-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}^3+6\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right| = \left|\frac{8}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}^3-12\sqrt{\frac{3}{2}}\right| = \left|-8\sqrt{\frac{3}{2}}\right| = 9{,}798$

c) $f(x) = -x^2 \quad g(x) = mx \quad f(x)-g(x) \Leftrightarrow -x^2-mx = 0 \Leftrightarrow x(-x-m)=0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = -m$

$A = \left|\int_{-m}^{0} -x^2-mx\,dx\right| = \left|\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{m}{2}x^2\right]_{-m}^{0}\right| = \left|-\left(\frac{1}{3}m^3-\frac{1}{2}m^3\right)\right| = \left|-\frac{1}{6}m^3\right| = \frac{1}{6}m^3$ für $m>0 \Rightarrow \frac{1}{6}m^3 = \frac{4}{3} \Rightarrow m^3 = 8 \Rightarrow \underline{\underline{m=2}}$

$= -\frac{1}{6}m^3$ für $m<0 \Rightarrow -\frac{1}{6}m^3 = \frac{4}{3} \Rightarrow m^3 = -8 \Rightarrow \underline{\underline{m=-2}}$